

- ❶ Dana P. Williams “A (Very) Short Course on C^* -Algebras”
skrypt dostępny online
 - ❷ Ian F. Putnam, “Lecture Notes on C^* -algebras”
skrypt dostępny online
 - ❸ G. Murphy, “ C^* -algebras and operator theory” Academic Press
Standardowa książka.
 - ❹ W. Rudin, “Analiza funkcjonalna” PWN, 1990
Podrozdziały 10-12 zawierają pewne podstawy
 - ❺ K. Zhu, “An Introduction to Operator Algebras”, CRC Press (1993)
Alternatywa dla Murphiego.
-
- ❻ B. Li. “Real operator algebras”, World Scientific Publishing Co.,
Podstawy rzeczywistych C^* -algebr (Pani Julia)
 - ❼ A. Sims “Hausdorff étale groupoids and their C^* -algebras”
Książka dostępna online (Pan Adam)

C^* -algebry

Bartosz Kwaśniewski

Wykład 1 Algebry Banacha i ideały

$$\text{algebra} \equiv \left(\begin{array}{l} \text{przestrzeń liniowa} + \\ \text{pierścień} + \text{łączność} \end{array} \right)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) = \lambda(a \cdot b).$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b, \quad a + b = b + a,$$

$$a + 0 = a, \quad a - a = 0$$

Def. Algebrą nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ nazywamy przestrzeń liniową A wraz z mnożeniem $\cdot : A \times A \rightarrow A$, które jest dwuliniowe i łączne.

Element neutralny mnożenia (o ile istnieje) nazywamy **jedynką**:

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \quad a \in A.$$

Algebra A jest **przemienna**, jeśli mnożenie w A jest przemienne:

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad a, b \in A.$$

Prz. Algebra macierzy

Zbiór macierzy kwadratowych $M_n(\mathbb{F})$ z **mnożeniem macierzowym**

$$[a \cdot b]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

oraz strukturą liniową zadaną po współrzędnych, jest algebrą.

- $M_n(\mathbb{F})$ ma jedynkę $1 = [\delta_{ij}]_{i,j=1}^n$, gdzie δ_{ij} symbol Kroneckera.
- $M_n(\mathbb{F})$ jest nieprzemienna chyba, że $n = 1$ ($M_1(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}$).

Prz. Algebra grupowa $\mathbb{F}(G)$

Niech $\mathbb{F}(G)$ będzie przestrzenią liniową rozpiętą przez elementy grupy G = zbiór sum $\sum_{g \in G} a_g g$, gdzie $a_g \in \mathbb{F}$, oraz $a_g \neq 0$ tylko dla skończonej ilości $g \in G$. Mnożenie grupowe indukuje mnożenie na $\mathbb{F}(G)$ wzorem

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \left(\sum_{h \in G} b_h h \right) := \sum_{g, h \in G} a_g b_h \underbrace{gh}_k = \sum_{k \in G} \left(\sum_{gh=k} a_g b_h \right) k.$$

- $\mathbb{F}(G)$ jest algebrą z jedyneką $1 \in G$.
- algebra $\mathbb{F}(G)$ jest przemienna $\iff$ grupa G jest przemienna.

Alternatywny opis:

Przestrzeń $C_c(G)$ funkcji $a : G \rightarrow \mathbb{F}$ o skończonych nośnikach ze strukturą liniową zadaną punktowo i **mnożeniem splotowym**

$$(a * b)(k) = \sum_{gh=k} a(g) \cdot b(h)$$

jest algebrą izomorficzną z $\mathbb{F}(G)$: $C_c(G) \ni a \mapsto \sum_{g \in G} a(g)g \in \mathbb{F}(G)$.

Motywacja. Niech X będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Przestrzeń Banacha liniowych operatorów ograniczonych $B(X)$ jest algebrą z mnożeniem zdefiniowanym jako **złożenie operatorów**:

$$T, S \in B(X) \implies T \circ S \in B(X) \text{ oraz } \|T \circ S\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$$

Operator identycznościowy 1 jest jedynką w $B(X)$ oraz $\|1\| = 1$.

Def. Algebrą Banacha nazywamy algebrę A , która jest również przestrzenią Banacha oraz norma jest **submultiplikatywna**, tzn.

$$\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|, \quad a, b \in A.$$

Jeżeli istnieje jedynka $1 \in A$, to zakładamy wtedy też, że $\|1\| = 1$.

Prz. Algebry operatorów ograniczonych na przestrzeni Banacha X

$B(X)$ jest algebrą Banacha z 1 nieprzemienią (jeśli $\dim(X) > 1$).
Każda domknięta podalgebra $A \subseteq B(X)$ jest algebrą Banacha.

Prz. Algebry funkcji ciągłych na przestrzeni topologicznej M

Przestrzenie $C_0(M)$ i $C_b(M)$ z normą $\|a\|_\infty = \sup_{t \in M} |a(t)|$ są przemiennymi algebrami Banacha z **mnożeniem punktowym**

$$(a \cdot b)(t) := a(t)b(t), \quad a, b : M \rightarrow \mathbb{F}.$$

Algebra $C_b(M)$ ma jedynekę 1 (jest to funkcja tożsamościowo równa 1).

Algebra $C_0(M)$ ma jedynekę $\iff$ przestrzeń M jest **zwarta** i wtedy

$$C_0(M) = C(M) = C_b(M).$$

Prz. Algebra z mnożeniem zerowym

Dowolna przestrzeń Banacha X z mnożeniem

$$x \cdot y := 0, \quad x, y \in X,$$

jest przemienną algebrą Banacha bez jedynek.

Sorry I'm Weird



Prz. Grupowa algebra Banacha dla grupy dyskretnej G

Przestrzeń $\ell^1(G)$ funkcji całkowalnych względem miary liczącej na G jest algebrą Banacha wraz z **mnożeniem splotowym**:

$$(a * b)(k) := \sum_{gh=k} a(g)b(h), \quad k \in G, a, b \in \ell^1(G).$$

Algebra $\ell^1(G)$ jest uzupełnieniem algebry grupowej $C_c(G)$ w normie $\|a\|_1 = \sum_{g \in G} |a(g)|$. Algebra $\ell^1(G)$ posiada jedynekę $1 = \mathbf{1}_{\{1\}} \in C_c(G)$.

Algebra $\ell^1(G)$ jest przemienna $\iff$ grupa G jest przemienna.

Prz. Algebra splotowa $L^1(\mathbb{R})$

Przestrzeń $L^1(\mathbb{R})$ funkcji całkowalnych względem miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}$ jest algebrą Banacha z **mnożeniem splotowym**:

$$(f \star g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}, f, g \in L^1(\mathbb{R})$$

Algebra $L^1(\mathbb{R})$ jest przemienna i nie posiada jedynek.



Def. Algebra Banacha A **zanurza się** w algebrę Banacha B jeżeli istnieje izometryczny homomorfizm $\pi : A \rightarrow B$. Wtedy $A \cong \pi(A)$ i możemy utożsamić A z domkniętą podalgebrą $\pi(A) \subseteq B$ algebry B .

Uw. Obraz izometrii określonej na przestrzeni zupełnej jest domknięty

Lem. Każda algebra Banacha A zanurza się w algebrę Banacha z jedyneką $\tilde{A}$ w taki sposób, że $\tilde{A} = \{a + \lambda 1 : a \in A, \lambda \in \mathbb{F}\}$

minimalne
ujedynkowanie

Dowód: Suma prosta $\tilde{A} := A \oplus \mathbb{F}$ wraz z mnożeniem i normą

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) := (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu), \quad \|(a, \lambda)\| := \|a\| + |\lambda|,$$

gdzie $a, b \in A$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, jest algebrą Banacha z jedyneką $(0, 1)$ oraz $A \ni a \mapsto (a, 0) \in \tilde{A}$ jest izometrycznym homomorfizmem algebr.



Twierdzenie

Każda algebra Banacha A zanurza się w algebrę operatorów ograniczonych $B(X)$ na pewnej przestrzeni Banacha X .

Dowód: Przechodząc do algebry $\tilde{A}$ możemy założyć, że A ma jedynekę.

Rozważmy $X := A$ jako przestrzeń Banacha (pomijamy mnożenie). Korzystając z mnożenia w A definiujemy π wzorem

$$\pi(a)x := a \cdot x, \quad a \in A, x \in X = A.$$

Ustalmy $a \in A$. Z rozdzielności mnożenia względem dodawania i łączności wynika, że $\pi(a)$ jest operatorem liniowym na X . Ponadto korzystając z submultiplikatywności normy w A mamy

$$\|\pi(a)\| = \sup_{\|x\|=1} \|\pi(a)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|a \cdot x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|a\| \cdot \|x\| = \|a\|.$$

Czyli $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$ oraz $\pi(a) \in B(X)$. Z drugiej strony skoro $\|1\| = 1$,

$$\|a\| = \|a \cdot 1\| = \|\pi(a)1\| \leq \|\pi(a)\| \cdot \|1\| = \|\pi(a)\|.$$

Zatem $\|\pi(a)\| = \|a\|$.

Wykazaliśmy, że $\pi : A \rightarrow B(X)$ jest poprawnie zdefiniowaną izometrią.

Z rozdzielności mnożenia względem dodawania oraz z łączności mnożenia wynika, że π jest homomorfizmem algebr.



Def. Ideałem (dwustronnym) w algebrze A nazywamy podprzestrzeń liniową $I \subseteq A$ taką, że $A \cdot I \subseteq I$ oraz $I \cdot A \subseteq I$. Piszemy wtedy $I \triangleleft A$.

Uw. Ideał jest podalgebrą, ale nie każda podalgebra jest ideałem.

Prz. Algebra macierzy $M_n(\mathbb{F})$ jest **prosta**: nie ma ideałów właściwych

Prz. Niech U będzie otwartym podzbiorem lokalnie zwartej przestrzeni Hausdorffa M . Algebra $C_0(U)$ zanurza się jako ideał w algebrze $C_0(M)$. Ponadto każdy domknięty ideał w $C_0(M)$ jest powyższej postaci.

zbiory otwarte w $M \longleftrightarrow$ domknięte ideały w $C_0(M)$

Prz. Niech N będzie normalną podgrupą grupy G . Wtedy algebra $\ell^1(N)$ zanurza się w $\ell^1(G)$ jako podalgebra Banacha, ale niekoniecznie ideał. Ale homomorfizm ilorazowy grup $G \rightarrow G/N$ indukuje kontraktywny homomorfizm algebr $\Phi : \ell^1(G) \rightarrow \ell^1(G/N)$.

Uw. Jądro homomorfizmu algebr $\Phi : A \rightarrow B$ jest ideałem w A . Ponadto jądro $\ker \Phi = \{a \in A : \Phi(a) = 0\}$ jest domknięte, jeżeli Φ jest ciągłe.

Def. Jeśli $I \triangleleft A$ to przestrzeń ilorazowa $A/I = \{a + I : a \in A\}$ wraz z

$$(a + I) \cdot (b + I) := ab + I, \quad a, b \in I,$$

jest algebrą, którą nazywamy **algebrą ilorazową**.

Tw. Jeśli $I \triangleleft A$ jest domkniętym ideałem w algebrze Banacha A , to algebra ilorazowa A/I jest algebrą Banacha z normą

$$\|a + I\| := \inf_{b \in I} \|a - b\|, \quad a \in A.$$

Dowód: Potrzebujemy pokazać, że

1) $\|a + I\| := \inf_{b \in I} \|a - b\|$ definiuje normę (ważna domkniętość I)

2) A/I jest zupełna w normie ilorazowej (ważna zupełność A)

Hint: przestrzeń jest zupełna $\Leftrightarrow$ szeregi zbieżne bezwzględnie są zbieżne

3) Norma ilorazowa jest submultiplikatywna (łatwe) ■

Uw. Jeśli $I \triangleleft A$ jest domknięty, to odwzorowanie ilorazowe $q : A \rightarrow A/I$
 $q(a) := a + I, a \in A$, jest homomorfizmem kontraktywnym ($\|q\| \leq 1$).